Wytrzymałość konstrukcji 1

Wykład 2

Przestrzenny stan naprężenia

Uproszczona analiza stanu trójwymiarowego

Metoda ogólna wyznaczania naprężeń głównych

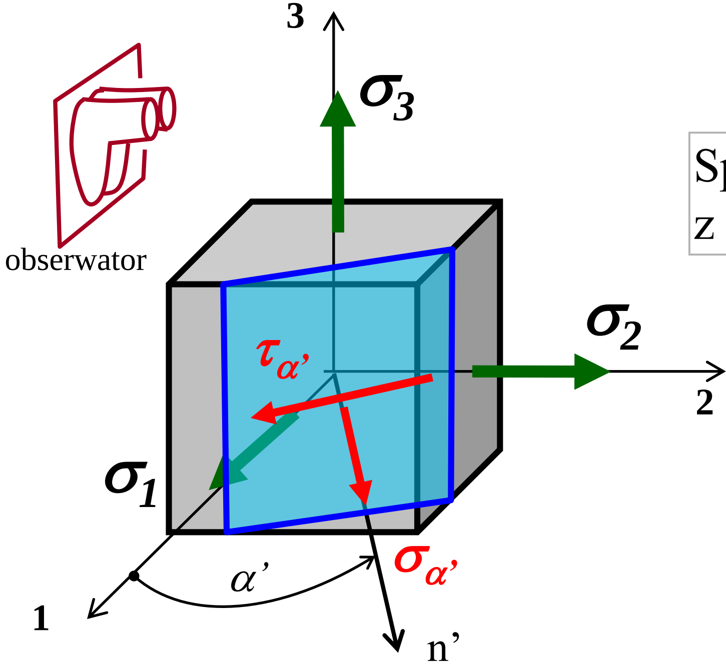
Równania równowagi w naprężeniach

Dr hab.inż. Piotr Marek

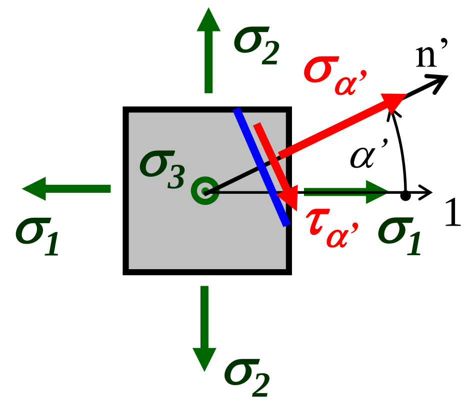
Uproszczona analiza stanu 3D

Rozważmy przestrzenny stan naprężenia w punkcie reprezentowany przez kostkę wyciętą myślowo w kierunkach głównych: **1**, **2**, **3**.

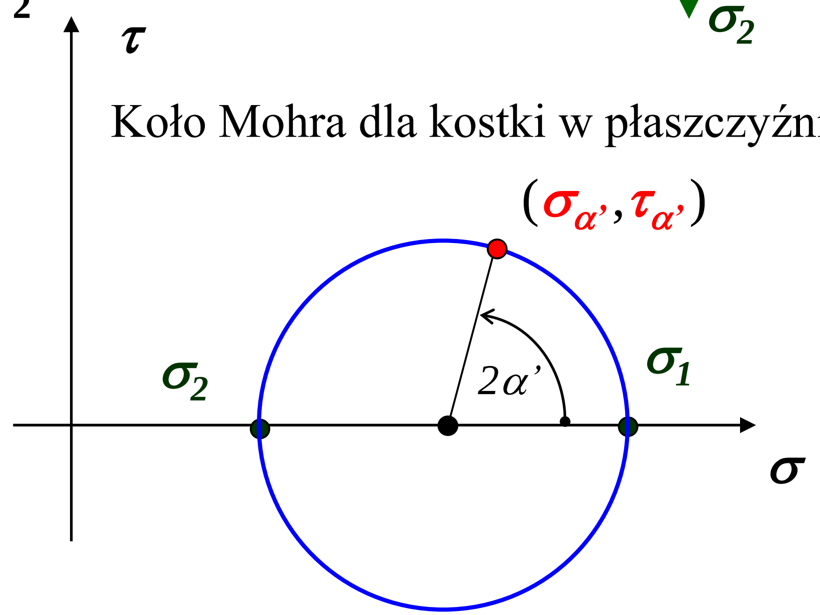
Na ściankach kostki uwidocznimy naprężenia główne: σ_1 , σ_2 , σ_3



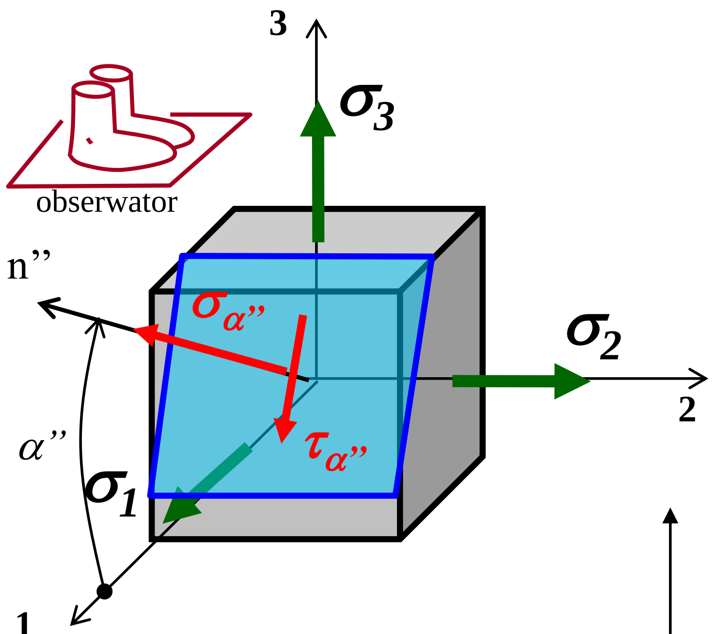
Spójrzmy na kostkę z góry *(z kierunku 3)*



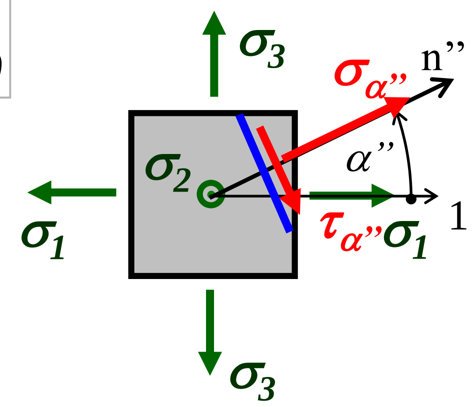
Koło Mohra dla kostki w płaszczyźnie 1-2



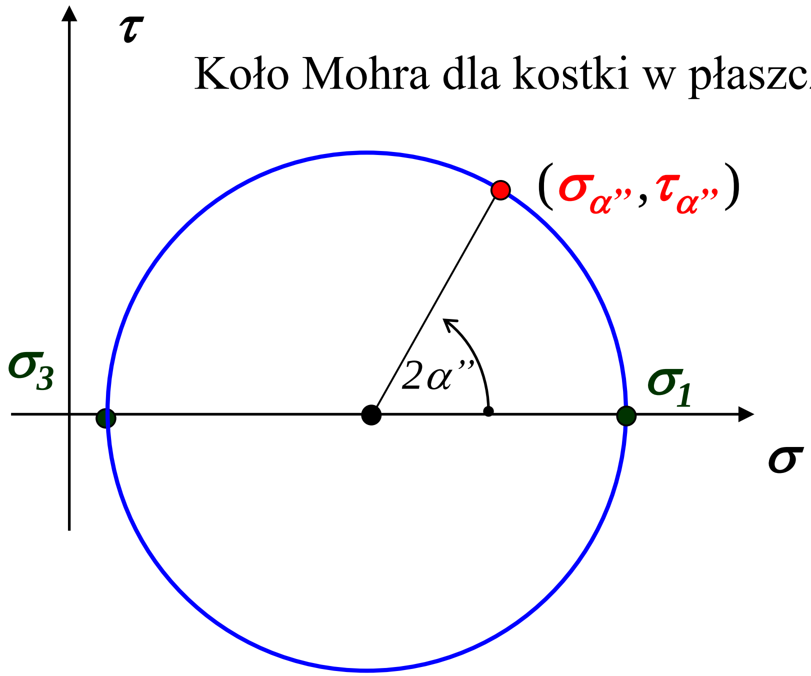
Uproszczona analiza stanu 3D



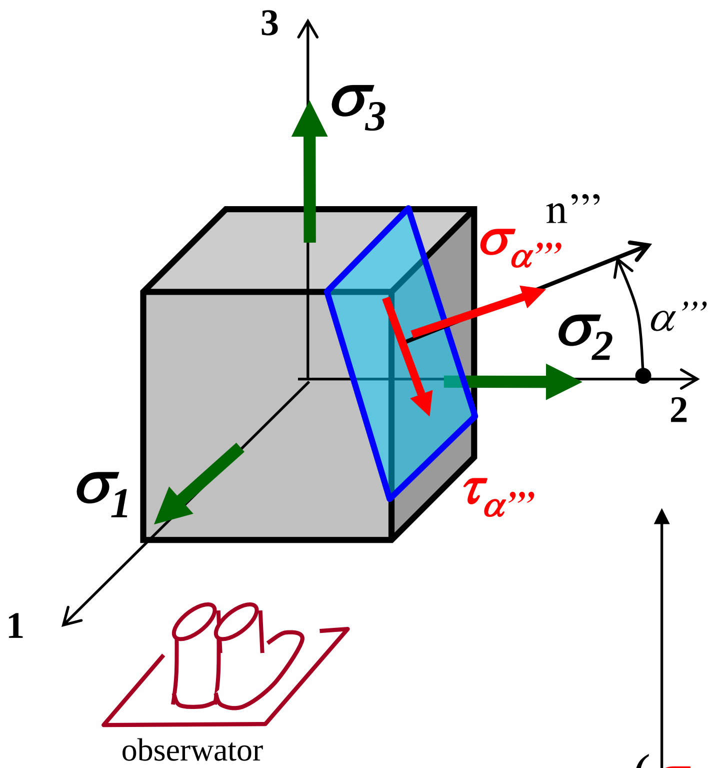
Spójrzmy na kostkę
z lewej *(z kierunku 2)*



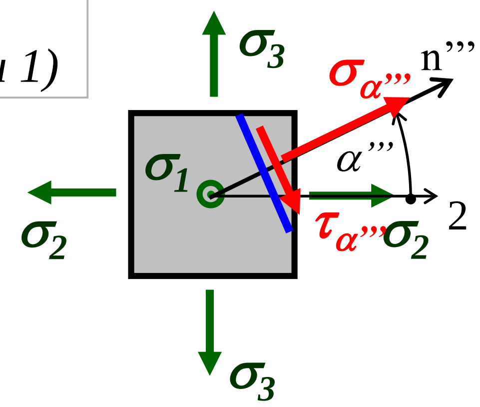
Koło Mohra dla kostki w płaszczyźnie 1-3



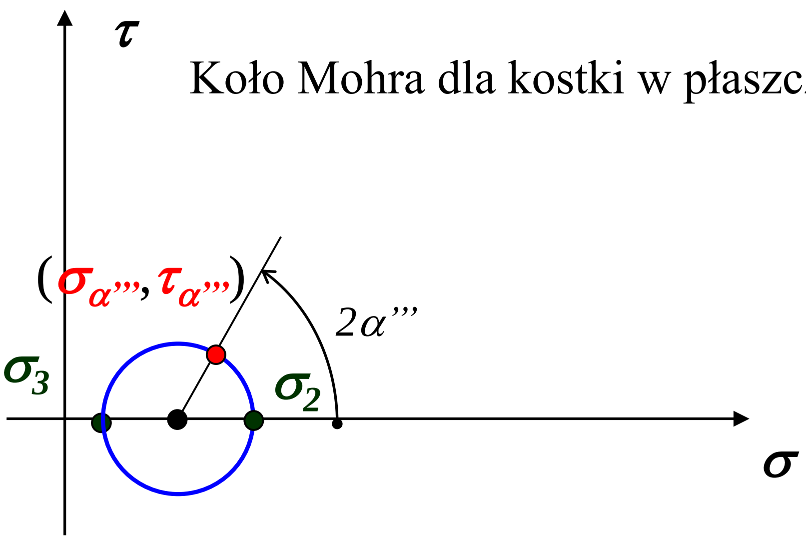
Uproszczona analiza stanu 3D



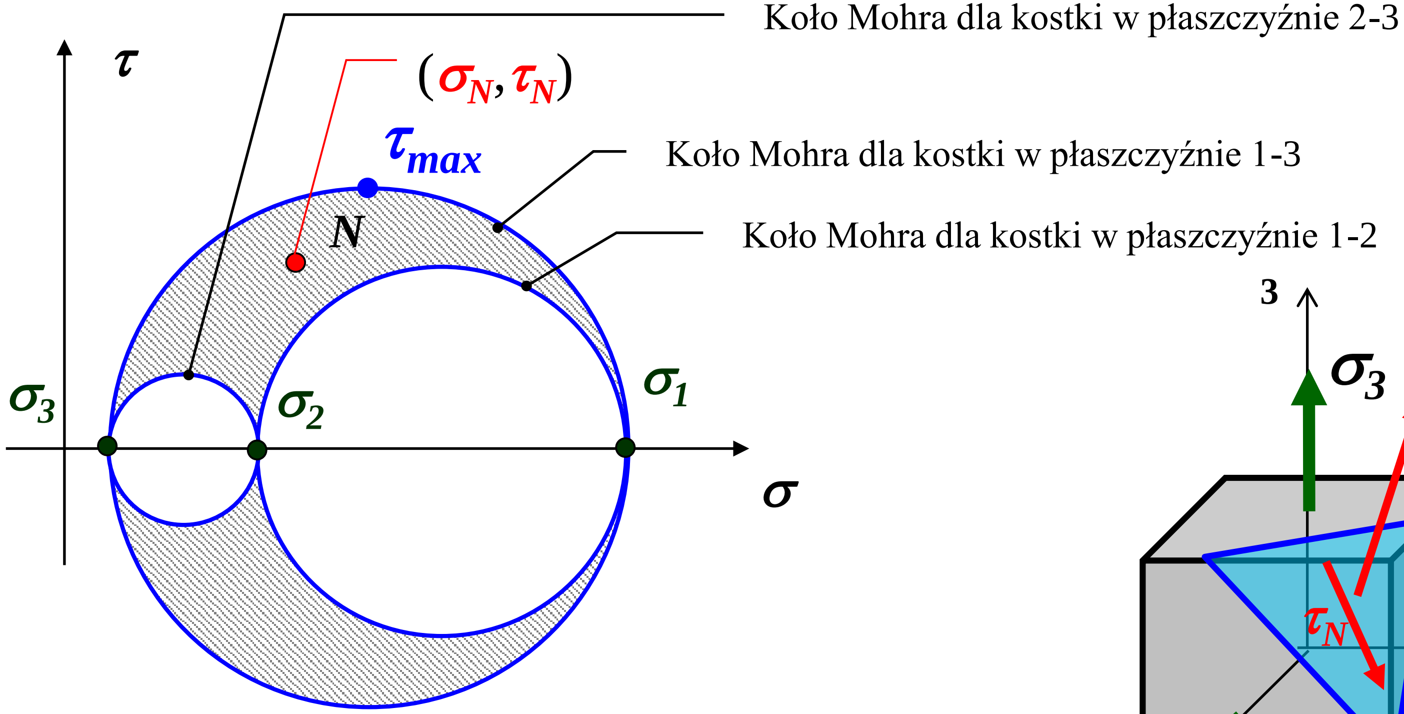
Spójrzmy na kostkę
od przodu *(z kierunku 1)*

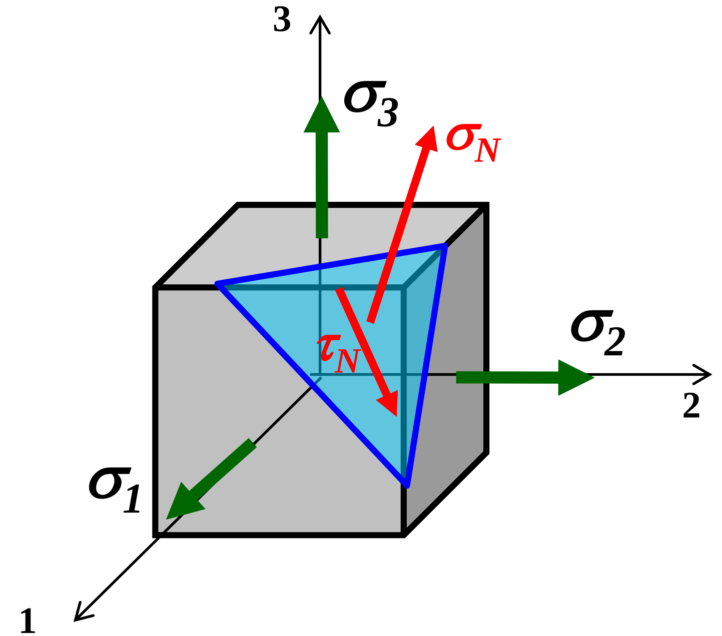


Koło Mohra dla kostki w płaszczyźnie 2-3



Uproszczona analiza stanu 3D



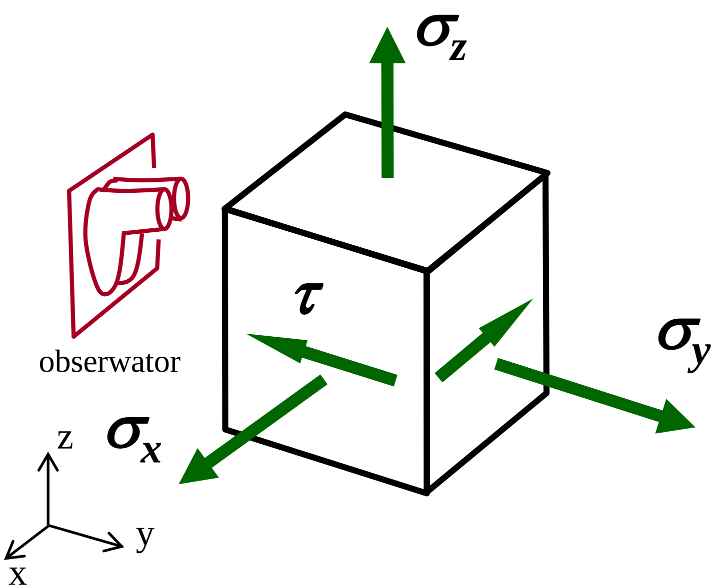


W Teorii Sprężystości dowodzi się, że punkt ***N*** leży w polu zakreskowanym między kołami w przestrzeni naprężeń

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|}$$

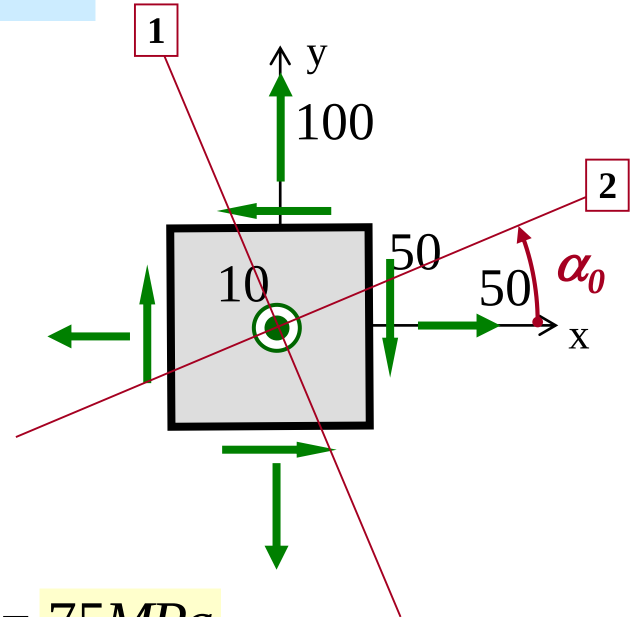
Jeśli w zadaniu odwrotnym *(poszukiwania naprężeń głównych)* na jednym z kierunków mamy naprężenie główne, to możliwe jest rozwiązanie zadania z wykorzystaniem schematu kół Mohra.

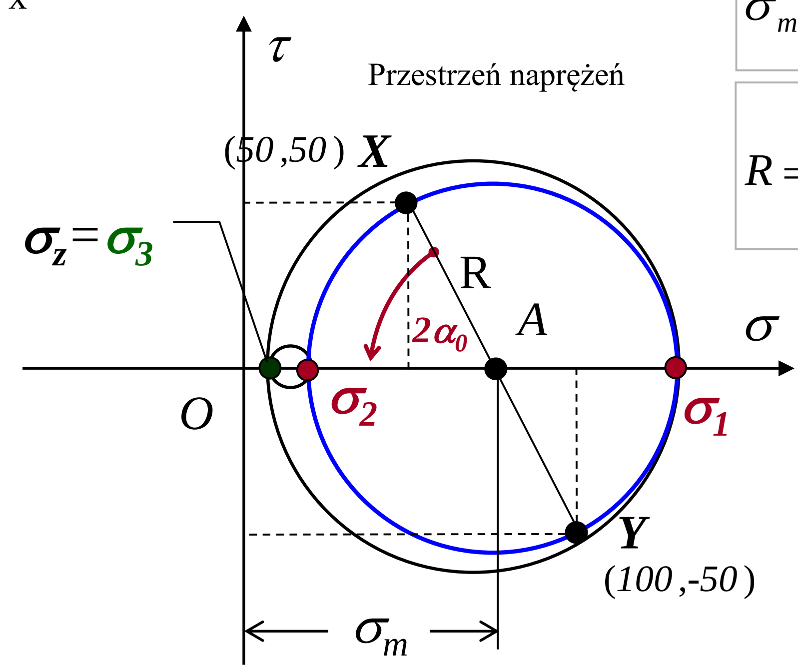
Przykład 1. Znaleźć kierunki główne i wartości główne stanu naprężenia. Wyznaczyć wartość τ_{max} i płaszczyznę jego działania.



σ_x =50 MPa
σ_y =100 MPa
σ_z =10 MPa
τ =50 MPa

Spójrzmy na kostkę z góry *(z kierunku **z**)*





$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50+100}{2} = 75MPa$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50-100}{2}\right)^2 + 50^2} = 56MPa$$

$$\sigma_1 = \sigma_m + R = 75+56 = 131MPa$$

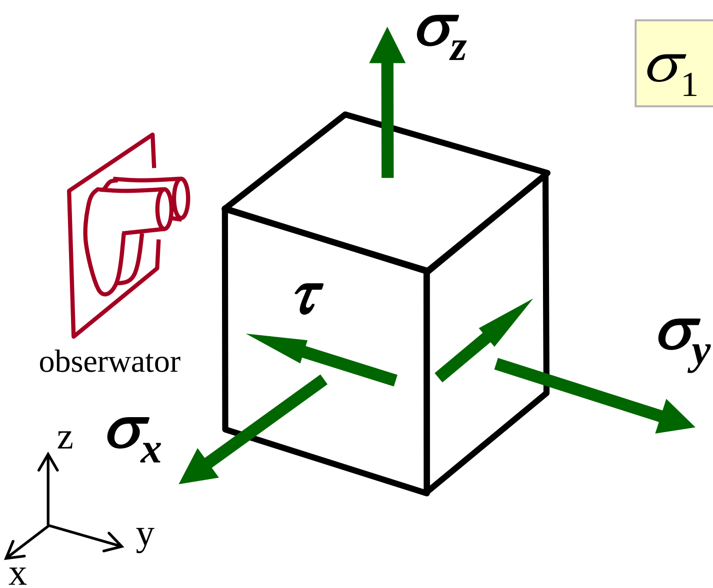
$$\sigma_2 = \sigma_m - R = 75-56 = 19MPa$$

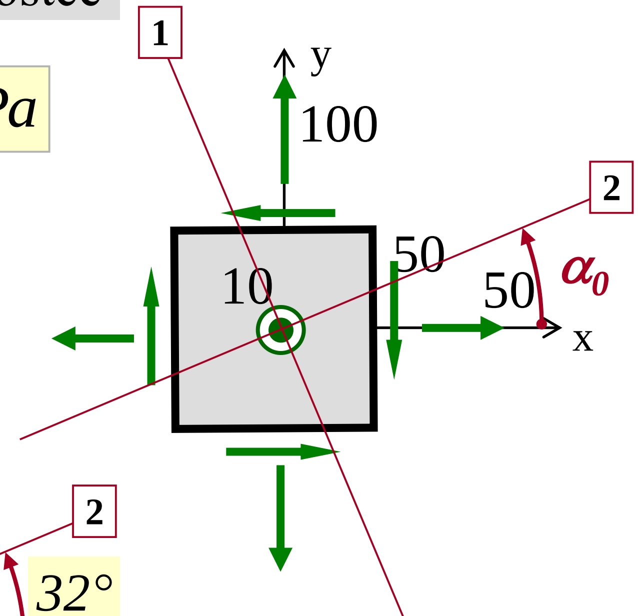
$$tg2\alpha_0 = \left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right| = \left|\frac{2\cdot 50}{50-100}\right| = 2 \rightarrow \alpha_0 = 32^\circ$$

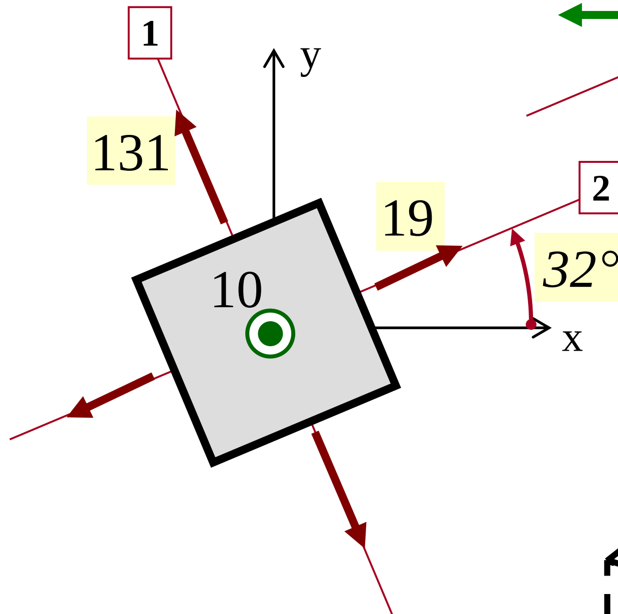
Pokażmy stan naprężeń w kierunkach głównych na kostce

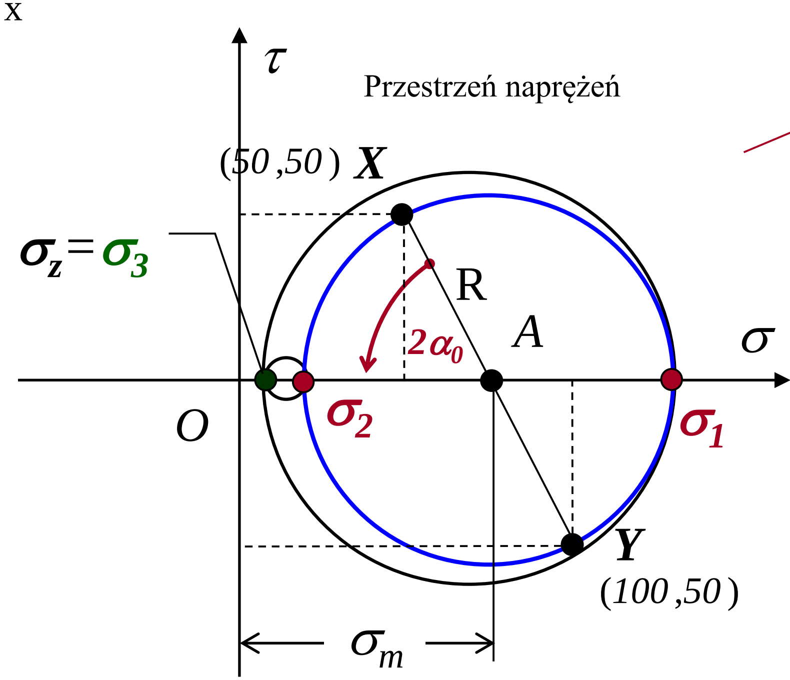
$$\sigma_1 = 131 MPa \qquad \sigma_2 = 19 MPa$$

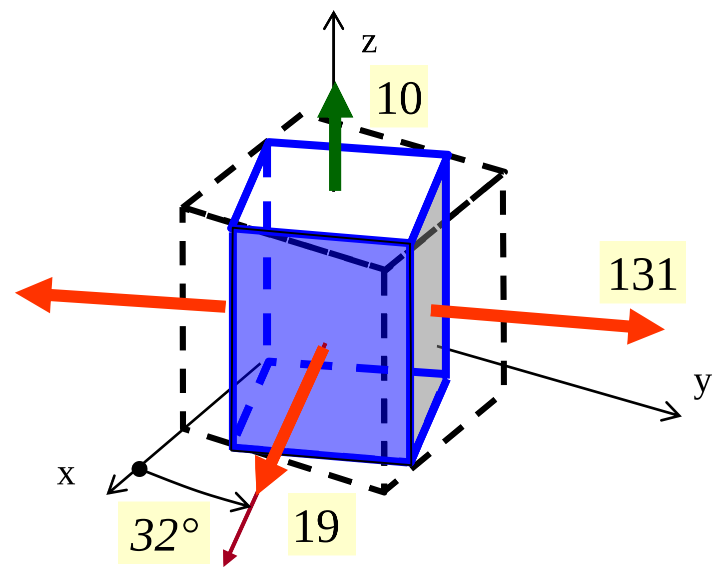
$$\alpha_0 = 32^\circ$$









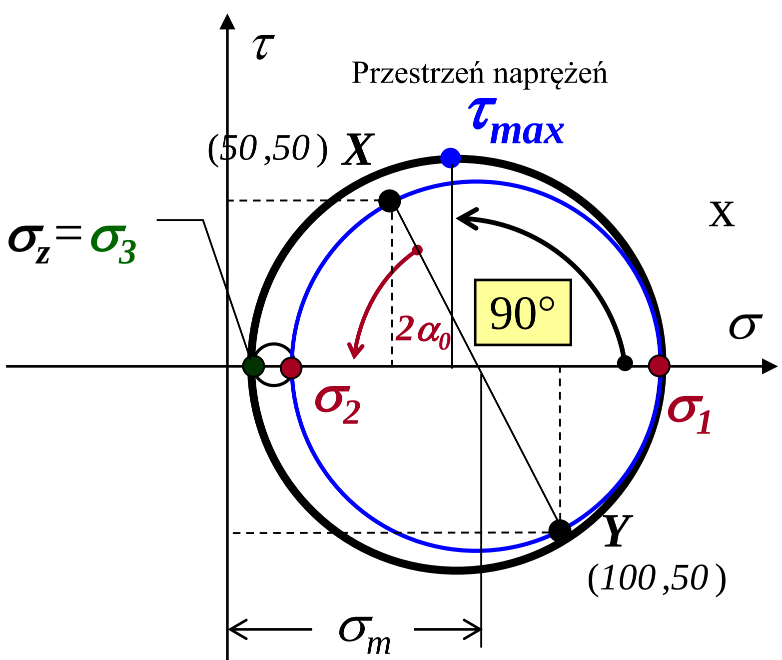


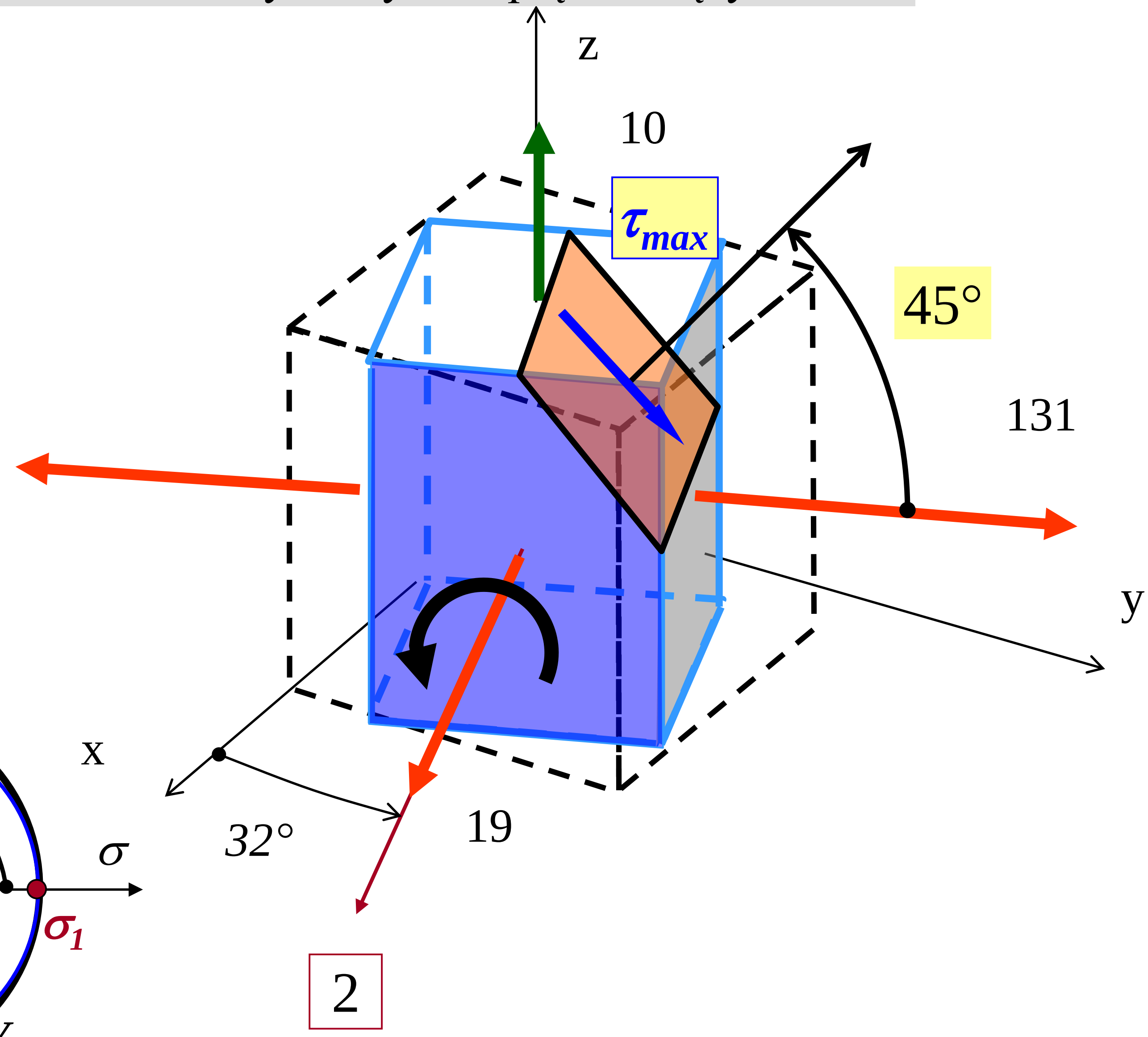
Pokażmy płaszczyznę działania maksymalnych naprężeń tnących

$$\tau_{\max} = \tfrac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|$$

$$\tau_{\max} = \tfrac{1}{2}\left|131 - 10\right|$$

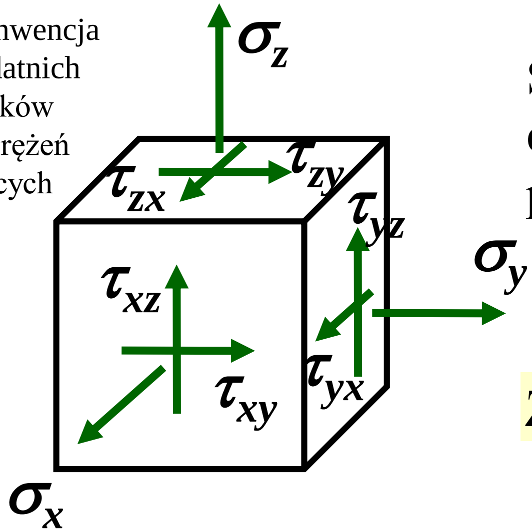
$$\boxed{\tau_{\max} = 61 MPa}$$





Metoda ogólna wyznaczania naprężeń głównych

Konwencja dodatnich znaków naprężeń tnących



Stan naprężenia w punkcie opisany jest matematycznie przez tensor rzędu II

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Zagadnienie na wartości własne:

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma\right) \cdot n_j = 0$$

macierz jednostkowa

naprężenie główne

wektor własny

$$\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & \sigma \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Wartości własne wyznaczamy z warunku: $\det\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma\right| = 0 \rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

(Naprężenia główne)

Kierunek główny1:

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_1\right) \cdot n_j = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

wektor własny dla kierunku 1

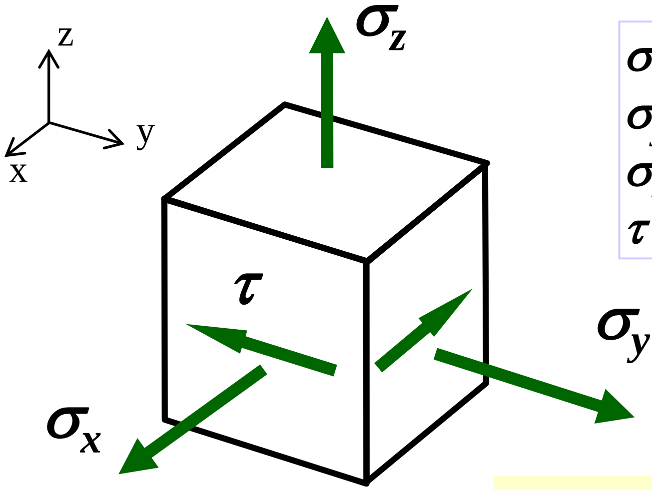
Kierunek główny2:

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_2\right) \cdot n_j = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

wektor własny dla kierunku 2

Kierunek główny3 *(analogicznie)*

Przykład 2. Rozwiązać zadanie z przykładu 1 sposobem ogólnym *(zagadnienie na wartości własne)*



σ_x =50 MPa
σ_y =100 MPa
σ_z =10 MPa
τ =50 MPa

Stan naprężenia opisany jest tensorem

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Zagadnienie na wartości własne: $\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma\right) \cdot n_j = 0$

Wartości własne wyznaczamy z warunku:

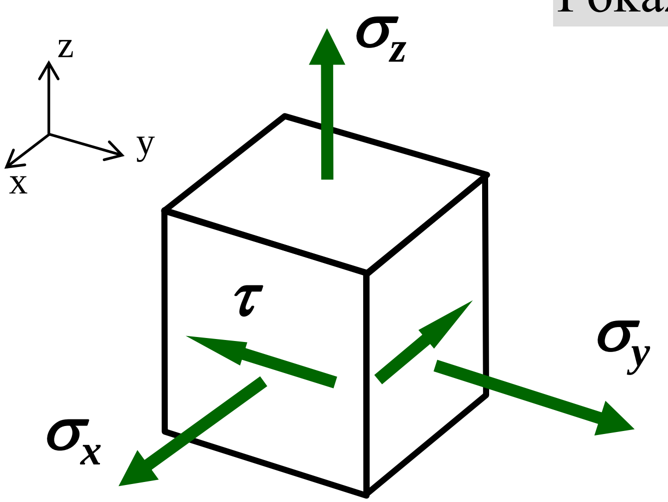
$$\det\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma\right| = 0 \longrightarrow \det\left|\begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} - \sigma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 50-\sigma & -50 & 0 \\ -50 & 100-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 10-\sigma \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (10-\sigma)\begin{vmatrix} 50-\sigma & -50 \\ -50 & 100-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(10-\sigma)\left(\sigma^2 - 150\sigma + 2500\right) = 0 \longrightarrow \sigma_1 = 131 MPa,\ \sigma_2 = 19 MPa,\ \sigma_3 = 10 MPa$$

(Naprężenia główne)

Pokażmy stan naprężeń w kierunkach głównych na kostce



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

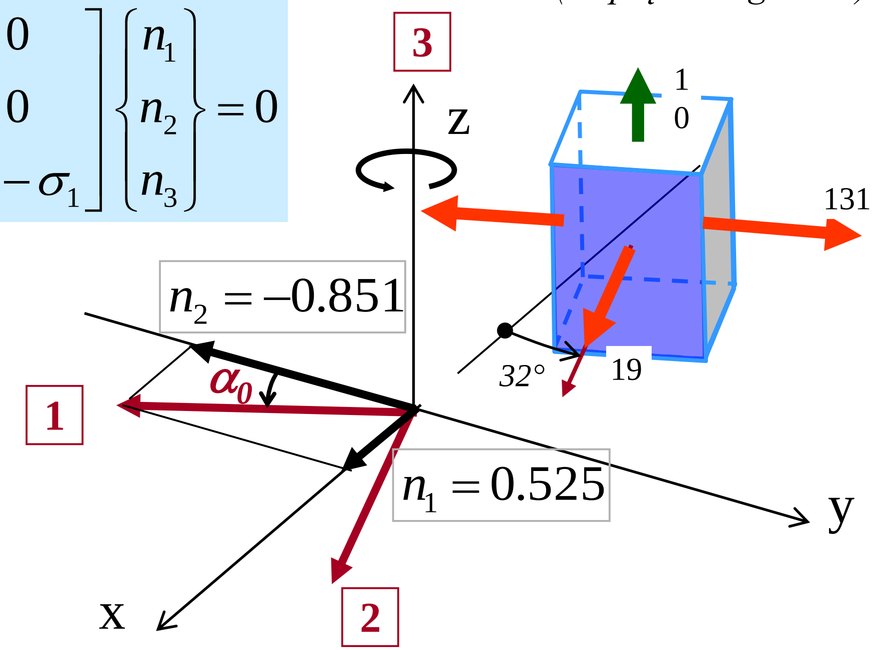
$$\sigma_1 = 131MPa,\ \sigma_2 = 19MPa,\ \sigma_3 = 10MPa$$

(Naprężenia główne)

Kierunek główny1:

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\cdot\sigma_1\right)\cdot n_j = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 50-\sigma_1 & -50 & 0 \\ -50 & 100-\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 10-\sigma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -81n_1 - 50n_2 = 0 \\ -50n_1 - 31n_2 = 0 \\ -121n_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n_2 = -\frac{81}{50}n_1 \\ \\ n_3 = 0 \end{cases}$$



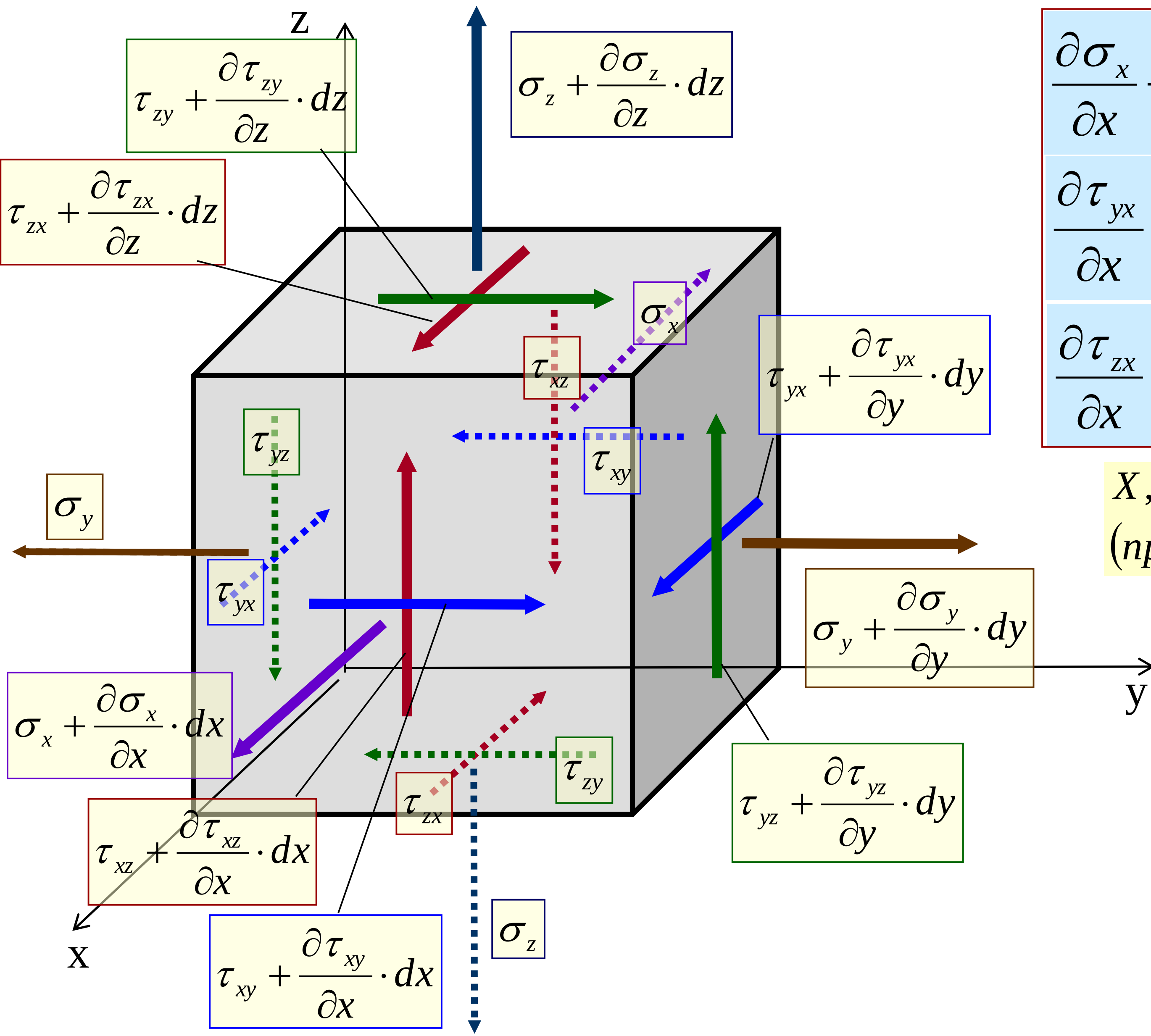
Normalizacja wektora własnego

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1^2 + \left(\tfrac{81}{50}\right)^2 n_1^2 + 0 = 1 \Longrightarrow n_1 = 0.525,\quad n_2 = -0.851,\quad n_3 = 0$$

$$tg\alpha_0 = \frac{0.525}{0.851} \Longrightarrow \alpha_0 = 32^\circ$$

Równania równowagi w naprężeniach



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

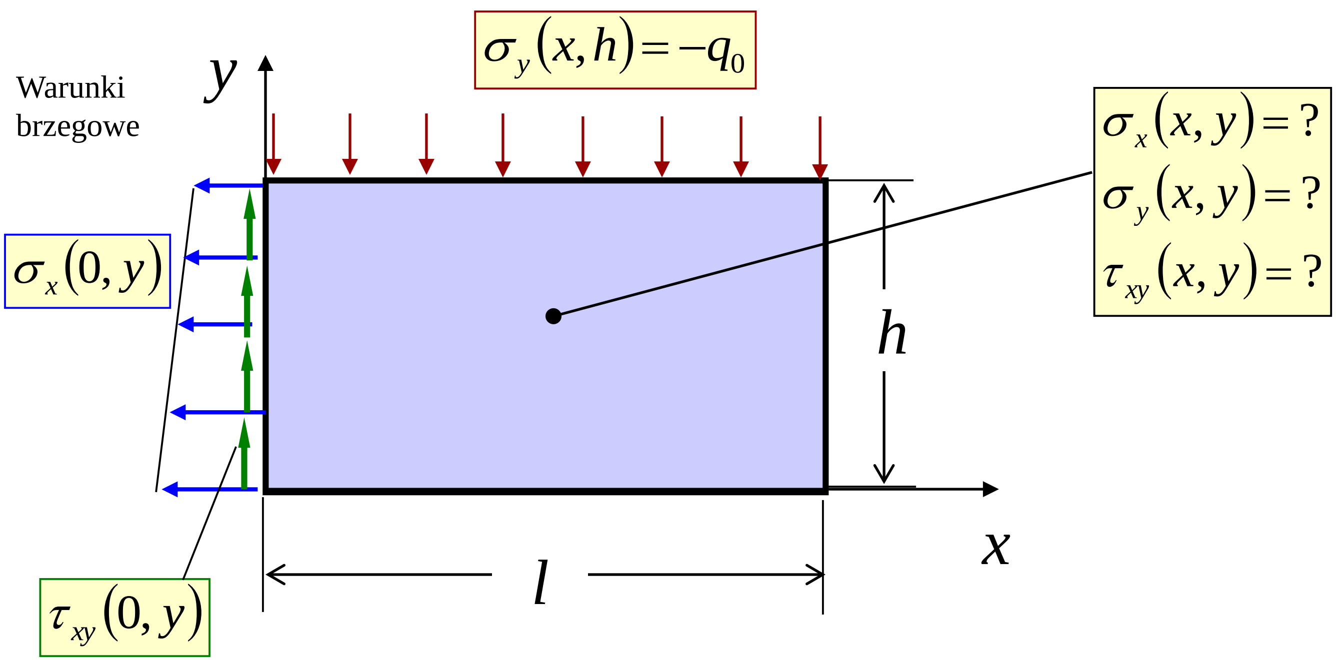
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

X, Y, Z – *pole sił masowych*

$(np: Z = -g\rho)$

Przykład 3. Wyznaczyć stan naprężenia w prostokątnej tarczy



Równania równowagi dla płaskiego stanu naprężenia (PSN)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$\xrightarrow{\text{Warunki brzegowe}}$

$\sigma_x(x,y)$

$\sigma_y(x,y)$

$\tau_{xy}(x,y)$

$X, Y = 0 \quad (\textit{bez sił masowych})$